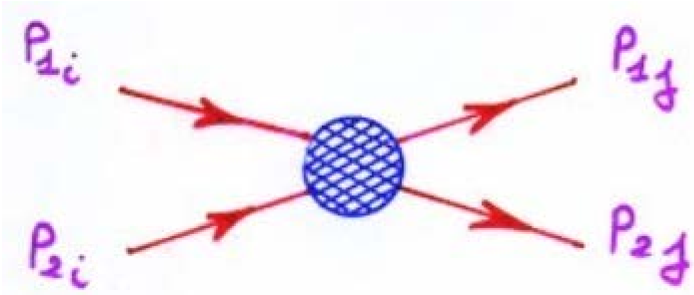
Никитин: А вы чем занимаетесь? (по научке)
Студентка: Космическими лучами!
Никитин: О! Расскажу историю. В молодости я тоже занимался космическими лучами. И вот я, юный лаборант, обнаруживаю левую анизотропию космических лучей. А это очень смелое открытие, тянущее едва ли не на Нобелевку. Зову бабку, которая этой темой занимается уже 100 лет и отсмотревшую уже 10000 снимков. Смотрит, получает правую анизотропию. Ничего не понимаем. Потом приходит понимание: я человечески смещал снимок к левому краю, а бабка к правому. Решили для проверки собрать фокус-группы из людей вообще не из этой области (космических лучей), усреднили – анизотропия пропала. Человеческий фактор!
Остальные 6 человек, пришедшие сдавать Никитину задачу: мысленно выражают Никитину disrespect за то, что он общается со студенткой, а они могут не успеть задачи. Ведь уже 10:30, а в 11:00 придут на лекцию физтехи!

Решение процессов по КЭД состоит из нескольких стадий, которые мы будем в наших методичках подробно разбирать. Я решил идти от самой последней к самой первой. Почему мне кажется так правильней? Во-первых, так сложилось со мной ☺ Во-вторых, психологически лучше «вот Васей Пупкина получена шняга, добей её до результата», чем «начни с начала и получи шнягу неизвестно зачем, которую потом Вася Пупкин обработает».

Так что поговорим про последнюю стадию - кинематику!



Напомню, что частицу 1f я обозначаю как 3, а 2f – как 4. Напоминаю, что
1 и 2 у меня – начальные частицы
3 и 4 – конечные
1 и 3, 2 и 4 – одного сорта (если это возможно).

Формул

$$d\sigma(s,t) = \frac{\left|M_{fi}(s,t)\right|^2}{64\pi((s-m_1^2-m_2^2)^2-m_1^2m_2^2}dt$$

$$\sigma(s) = \int\limits_{t_{\text{мин}}}^{t_{\text{макс}}} \frac{d\sigma(s,t)}{dt}dt$$

$$t_{\text{мин}} = m_1^2 + m_3^2 - 2\left(\sqrt{\frac{1}{4s}\lambda(s,m_1^2,m_2^2)+m_1^2}\sqrt{\frac{1}{4s}\lambda(s,m_3^2,m_4^2)+m_3^2}+\frac{1}{4s}\sqrt{\lambda(s,m_1^2,m_2^2)\lambda(s,m_3^2,m_4^2)}\right)$$

$$t_{\text{макс}} = m_1^2 + m_3^2 - 2\left(\sqrt{\frac{1}{4s}\lambda(s, m_1^2, m_2^2) + m_1^2}\sqrt{\frac{1}{4s}\lambda(s, m_3^2, m_4^2) + m_3^2} - \frac{1}{4s}\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)\lambda(s, m_3^2, m_4^2)}\right)$$

$$\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$$

В Никитине нет. Причём нет, как я понимаю, исключительно в педагогических целях. Потому что эти формулы имба ☺

Давайте немного про их вывод.

Аффтар, ты чокнутый? Никто не будет читать вывод!

Я бы всё-таки порекомендовал бы послушать меня – чтобы было понятно, откуда рождаются эти крокодилы ☺

На прозрачке 100 Никитин он получает формулу

$$d\sigma_{1_i+2_i \to 1_f+2_f} = \frac{|i M_{fi}(s,t)|^2}{64\pi[(P_{1_i}P_{2_i})^2 - m_{1_i}^2 m_{2_i}^2]} dt$$

Которая практически совпадает с моей:

$$d\sigma(s,t) = \frac{\left|M_{fi}(s,t)\right|^2}{64\pi((s - m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 m_2^2} dt$$

С той лишь разницей, что псевдоскалярное произведение $\boldsymbol{p_1 p_2}$ лучше сразу выразить через релятивистские инварианты: $s - m_1^2 - m_2^2$ (что я и проделал).

Теперь самое противное – про интегрирование по t:

$$\sigma(s) = \int_{t_{\text{мин}}}^{t_{\text{макс}}} \frac{d\sigma(s,t)}{dt} dt$$

При фиксированном s (определяемом начальном условием – под каким углом направлены пучки) и массами m_1, m_2, m_3, m_4 t не произвольно, а ограничено верхним и нижнем пределами. Вот как их найти?

Давайте рассуждать:

$$t = (\boldsymbol{p_3} - \boldsymbol{p_1})^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2\boldsymbol{p_1 p_3} = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1E_3 + 2\overrightarrow{p_1}\overrightarrow{p_3}$$

По формулам с прозрачки 100

$$|\vec{p}_i| = \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda^{1/2}(s, m_{1_i}^2, m_{2_i}^2), \quad |\vec{p}_f| = \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda^{1/2}(s, m_{1_f}^2, m_{2_f}^2)$$

Откуда

$$t = m_1^2 + m_3^2 - 2\sqrt{p_1^2 + m_1^2}\sqrt{p_3^2 + m_3^2} + 2p_1p_3cos\theta$$

Подставляя p_1 и p_3 через λ-функции, и получим пределы.

У этой формулы есть несколько частных случаев:
Когда одна из начальных и конечных частиц безмассовые

Тогда минимальное t (или u, что одно и то же) $(2m^2-s)\cdot s$,

,а максимальное m^4.

Совсем простой частный случай – ***все частицы безмассовы.***
Тогда

$$d\sigma = \frac{|M^2|}{16\pi s^2}dt$$

$$\sigma(s) = \int_{-s}^{0}\frac{\partial\sigma}{\partial t}dt$$

Пример!
М-матричный элемент реакции $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ равен

$$\frac{32\pi^2\alpha_{em}^2}{s^2}\left(s^2+2st+2t^2\right)$$

В случае, когда электрон и мюон безмассовые, Никитин считает сечение сам:

$$\sigma_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-}(s) = \frac{2\pi\alpha_{em}^2}{s^4}\int_{-s}^{0}dt\left(s^2+2st+2t^2\right) =$$

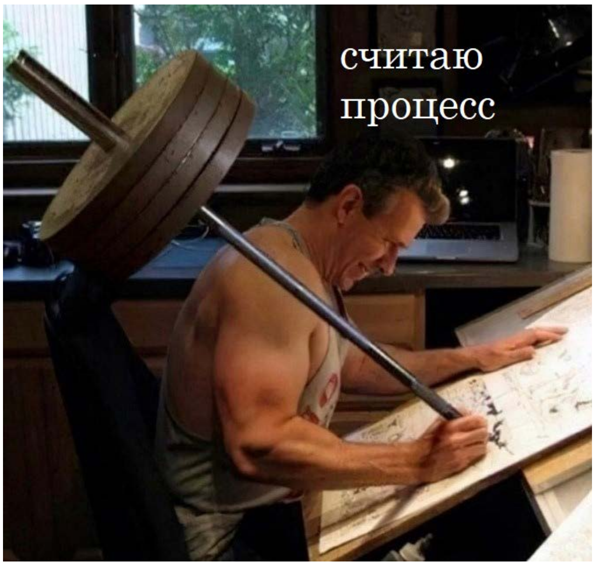
$$= \frac{2\pi\alpha_{em}^2}{s^4}\left(s^2t+st^2+\frac{2}{3}t^3\right)\Big|_{-s}^{0} = \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{3s}.$$

А вот мы заходим уточнить результат, учтя массы электрона и мюона.
Итак, задача: нужно пересчитать пределы.
Ну что, подрубаем формулы

$$t_{\text{мин}} = m_1^2+m_3^2-2\left(\sqrt{\frac{1}{4s}\lambda(s,m_1^2,m_2^2)+m_1^2}\sqrt{\frac{1}{4s}\lambda(s,m_3^2,m_4^2)+m_3^2}+\frac{1}{4s}\sqrt{\lambda(s,m_1^2,m_2^2)\lambda(s,m_3^2,m_4^2)}\right)$$

$$t_{\text{макс}} = m_1^2+m_3^2-2\left(\sqrt{\frac{1}{4s}\lambda(s,m_1^2,m_2^2)+m_1^2}\sqrt{\frac{1}{4s}\lambda(s,m_3^2,m_4^2)+m_3^2}-\frac{1}{4s}\sqrt{\lambda(s,m_1^2,m_2^2)\lambda(s,m_3^2,m_4^2)}\right)$$

будем считать! Массу электрона обозначим как m_a, массу мюона обозначим как m_b.



Тогда $\lambda(s, m_1^2, m_2^2) = \lambda(s, m_a^2, m_a^2) = s^2 + m_a^4 + m_a^4 - 4sm_a^2 - 2m_a^2 = s(s - 4m_a^2)$

$$\lambda(s, m_3^2, m_4^2) = s(s - 4m_b^2)$$

$$t_{\text{мин}} = m_a^2 + m_b^2 - 2\left(\sqrt{\frac{1}{4s}s(s-4m_a^2) + m_a^2}\sqrt{\frac{1}{4s}s(s-4m_b^2) + m_b^2} + \frac{1}{4s}\sqrt{s(s-4m_a^2)s(s-4m_b^2)}\right)$$

$$t_{\text{макс}} = m_a^2 + m_b^2 - 2\left(\sqrt{\frac{1}{4s}s(s-4m_a^2) + m_a^2}\sqrt{\frac{1}{4s}s(s-4m_b^2) + m_b^2} - \frac{1}{4s}\sqrt{s(s-4m_a^2)s(s-4m_b^2)}\right)$$

Упростим:

$$t_{\text{мин}} = m_a^2 + m_b^2 - 2\left(\sqrt{\frac{1}{4}(s-4m_a^2) + m_a^2}\sqrt{\frac{1}{4}(s-4m_b^2) + m_b^2} + \frac{1}{4}\sqrt{(s-4m_a^2)(s-4m_b^2)}\right)$$

$$t_{\text{макс}} = m_a^2 + m_b^2 - 2\left(\sqrt{\frac{1}{4}(s-4m_a^2) + m_a^2}\sqrt{\frac{1}{4}(s-4m_b^2) + m_b^2} - \frac{1}{4}\sqrt{(s-4m_a^2)(s-4m_b^2)}\right)$$

Ещё упрощаем:

$$t_{\text{мин}} = m_a^2 + m_b^2 - 2\left(\sqrt{\frac{1}{4}s}\sqrt{\frac{1}{4}s} + \frac{1}{4}\sqrt{(s-4m_a^2)(s-4m_b^2)}\right)$$

$$t_{\text{макс}} = m_a^2 + m_b^2 - 2\left(\sqrt{\frac{1}{4}s}\sqrt{\frac{1}{4}s} - \frac{1}{4}\sqrt{(s-4m_a^2)s(s-4m_b^2)}\right)$$

Т.е.

$$t_{\text{мин}} = m_a^2 + m_b^2 - \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{(s-4m_a^2)(s-4m_b^2)}\right)$$

$$t_{\text{макс}} = m_a^2 + m_b^2 - \frac{1}{2}\left(s - \sqrt{(s-4m_a^2)(s-4m_b^2)}\right)$$

Что и требовалось найти!

Отметим, что из один процессов, который предлагает Никитин, таков:

найти сечение реакции $\mu^+\mu^- \to e^+e^-$, если $m_e = 0$, а $m_\mu \neq 0$.

Как вы видите, это частный случай, если $m_b = 0$.
А если рассмотреть полностью безмассовые частицы $m_a = m_b = 0$, то и получим пределы с –s до 0. Так что Никитин нас не обманул.

Возможна и вот такая вот ситуация:
найти сечение рассеяния позитрона на мюоне $e^+\mu^- \to e^+\mu^-$, если $m_e = 0$, а $m_\mu \neq 0$.
Как вы понимаете, в этой задаче нужно взять готовый матричный элемент, а пределы подсчитать с учётом $m_1 = m_3 = 0$. Проделайте это самостоятельно.